FUNDACIÓN MAZDA PARA EL ARTE Y LA CIENCIA*

Fernando Isaza Delgado

RESUMEN

Matemáticos y físicos, desde los albores de estas disciplinas han formulado problemas y conjeturas que muy posteriormente y gracias a herramientas nuevas y desarrollo insospechados han encontrado alguna respuesta. La geometría en los griegos; las matemáticas en el Renacimiento y en la modernidad han formulado problemas que reciben soluciones complejas. Y aún a comienzos del nuevo Milenio se siguen formulando problemas científicos de difícil solución.

ABSTRACT

In the beginning of sciences, such as mathematics and physics, all long to the academic history, from the ancient greeks to the modem mathematicians, there was a great deal of scientifical insolved questions or solved much later with different scientifical tools. Right now, in the beginning of the third Millennium, scientist ask for solution to complet modern problems of physics.

PALABRAS CLAVES

Matemáticas, física, geometría, ecuaciones, problemas, conjeturas, hipótesis, teorías, demostraciones, soluciones.

FUNDACIÓN MAZDA PARA EL ARTE Y LA CIENCIA DÉCIMA SEGUNDA ENTREGA DE BECAS, MARZO 18 DE 2003

La entrega de becas de la "Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia" del año 2003 coincide con un aniversario de especial significado para la Compañía Colombiana Automotriz, los 20 años de la iniciación del ensamble de vehículos

*El doctor José Fernando Isaza Delgado, Presidente de la Fundación Mazda, cedió para su publicación en la Revista CIVILIZAR, el discurso que pronunció con oportunidad de la décima segunda entrega de becas, marzo 18 de 2003.

Mazda por parte de la empresa gestora y financiadora de la "Fundación". En las próximas semanas directivos japoneses de la casa matriz Mazda visitarán a Colombia, renovando en esa forma, su decisión de permanencia en el país con nuevas inversiones y ofreciendo productos con las tecnologías de punta cada vez más apropiadas.

En esta ocasión quiero referirme a un tema que ha acompañado el quehacer de los matemáticos y los físicos desde los albores de estas disciplinas; la formulación de problemas y de conjeturas. Con sobrada razón se afirma que en esas disciplinas es posiblemente más importante formular un buen problema que obtener su solución. Casi siempre los nuevos caminos que se abren en la búsqueda de respuestas son más enriquecedores que estas mismas. Generalmente los problemas adecuados dan origen a desarrollos insospechados en diferentes áreas de las matemáticas. Un problema que sea un reto obliga a crear herramientas nuevas para su solución y esta puede encontrarse en áreas de la matemática diferentes a aquella en la cual fue formulado.

Los Griegos

Los maestros indiscutibles en formular problemas de sencillo enunciado y de difícil solución fueron los pensadores de la Grecia clásica. Los tres problemas más notables fueron generados en el área de la geometría plana, pero su solución trascendió la geometría y la respuesta se halla en la teoría de grupos y los campos algebraicos.

Estos problemas buscan definir métodos de construcción teórica, de figuras geométricas, empleando solamente la regla y el compás. Son ellos la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

Duplicación del Cubo

Se pide, conociendo el lado de un cubo, construir la arista de otro cuyo volumen sea el doble del primero. La primera referencia a este problema se encuentra en Eudoxios en el siglo VI A.D. Este problema se conoce como la construcción Deliana, en referencia a la solicitud del oráculo de Delfos de duplicar el altar de Delios, el cual naturalmente tenía forma de un cubo. La solución analítica es simple, se reduce a calcular la raíz cúbica de 2. Sin embargo, pasaron más de 2.500 años para que pudiera demostrarse que con regla y compás no es construible esta raíz. La solución inicial se le debe a Schoenemann's y posteriormente Gauss la simplifica notablemente.

Trisección del Ángulo

Es bien conocida la sencilla construcción de dividir un ángulo en 2,4,8, etc. en partes iguales. Era natural preguntarse si es posible dividirlo en tres partes iguales. Transcurren 25 siglos de haberse formulado para demostrar que es imposible la solución para un ángulo arbitrario. Gauss prueba que trisectar con regla y compás un ángulo de 60° implica construir la raíz de una ecuación de tercer grado y no es posible realizarlo con estos instrumentos. Estos sólo permiten la determinación de números racionales y números algebraicos que sean raíces de ecuaciones reducibles en el campo de números racionales ampliado con radicales.

Cuadratura del Círculo

A diferencia de lo que creen algunos formadores de opinión, no pedían los griegos realizar un absurdo, hacer un círculo cuadrado. Es claro que no eran estúpidos, simplemente buscaban, empleando los utensilios de los masones, construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un circulo. En términos equivalentes construir un segmento de recta de longitud Π. Valores aproximados es fácil construirlos por ejemplo el número 355/113 difiere de Π en menos de una millonésima y es imposible distinguirlo de este, aún con buenos instrumentos de medida. Una figura geométrica llamada los "lúnulas de Hipócrates" cuyo perímetro son arcos de círculo admite "cuadratura", es decir puede obtenerse un cuadrado de área igual a los lúnulas. Esto alentaba la posibilidad de obtener un procedimiento para "cuadrar" el círculo. La solución a este problema y otra vez por la negativa la obtiene Charles Hermite en 1873 al demostrar que el número Π no es solución de ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros.

Otro tópico de interés en la geometría clásica era definir cuales polígonos regulares eran construibles con regla y compás. La construcción del triángulo, del hexágono, del cuadrado es elemental, para realizar el pentágono se requiere más sofisticación e involucra la relación favorita de los arquitectos griegos y pintores renacentistas, la razón aúrea. La leyenda quiere, que el examen de admisión para el ingreso a la academia pitagórica fuese la construcción del pentágono. Aunque algún imaginativo y distinguido matemático colombiano, en un ensayo sobe "la división ritual del círculo por los chibchas" afirma que nuestros ancestros conocían la solución del problema pitagórico, no hay evidencia de esto. La solución general al problema se debe a Gauss (1777-1855), quien a los 18 años demostró que sólo son construibles los polígonos cuyo número de lados sea el producto de una potencia de 2 y números primos de la forma de $2^n + 1$, de esto se deduce que no es posible, por ejemplo, construir el polígono de 7 lados –el heptágono regular–, pero si el de 17 lados.

EL RENACIMIENTO

La actividad matemática en Europa sufre lo que podemos llamar una catalepsia que se extiende durante toda la Edad Media. Por el contrario en las culturas islámicas e hindúes este quehacer es activo. Esto explica la ausencia de problemas en Europa hasta bien consolidado el Renacimiento.

Los problemas originados en el Renacimiento comparten con los de los griegos en que es fácil su comprensión para quienes tuvieran una cultura matemática básica. Sinembargo, a medida que se avanza en la historia, y en particular en los últimos 100 años es cada vez más reducido el porcentaje de las personas que comprenden el significado de cada uno de los términos que componen el enunciado de los problemas contemporáneos.

Entre los más conocidos problemas del Renacimiento merecen citarse:

SOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS - Los métodos para hallar las raíces de la ecuación de primero y segundo grado eran conocidos desde los sumerios y hoy en día por los estudiantes de 8 grado. El reto de los algebristas era encontrar una expresión que sólo involucrara las operaciones aritméticas y los radicales para expresar las raíces de una ecuación de grado superior a 2. En 1543 Tartaglia encuentra la solución para algunos casos particulares de la de tercer grado, Cardan y posteriormente Vieta encuentran la solución a la ecuación cúbica general. Federico Ferrari publica un método general para la ecuación de cuarto grado. El problema siguiente era obvio: expresar con las operaciones aritméticas y radicales la solución de las ecuaciones de grado quinto a mayor. Como es usual en matemáticas la respuesta se encuentra por la negativa. En 1826 el noruego Henrik Abel demuestra que es imposible expresar las raíces de las ecuaciones generales de grado 5 ó mayor. Su trabajo y el Galois para afrontar este problema dieron origen a la teoría de grupos.

PROBABILIDAD - Se le atribuye a Antoine Gombaud, conocido como el "Caballero de Méré" el planteamiento de unos problemas de azar a Blaise Pascal. Su elemental solución es el origen de los trabajos de probabilidad. El caballero era un buen tahúr pero mal calculador de las ventajas, siempre creyó que era más probable obtener al menos un doble as en 24 lanzamientos de dados que al menos un as lanzando cuatro dados.

TEOREMA DE FERMAT - Amplia fue la difusión que se dio en 1994 a la demostración de Andre Wiles al problema que ocupó durante más de 300 años a los mejores matemáticos. Demostrar que la igualdad $a^n + b^n = c^n$. No es posible si, a, b, c son números enteros y n es un número entero mayor que 2. Si n es igual a dos la solución se conoce como las ternas pitagóricas. En su solución emplea las más delicadas técnicas de las funciones elípticas y resultados muy finos de funciones modulares.

Por ser mayor de 40 años Wiles no fue postulado a la Medalla Fields a la cual se hubiera hecho acreedor con sobrados méritos.

Problemas de los tres cuerpos - Luego de la muerte de Newton, Jean Bernoulli en 1710, uno de los nueve famosos, resuelve la ecuación diferencial que describe la trayectoria de un planeta alrededor del sol –problema de los dos cuerpos–. El problema siguiente era determinar la trayectoria que siguen tres cuerpos bajo la acción de la ley de gravitación universal. Se refiere a cuerpos celestes y en ningún momento hace referencia al mínimo número de cuerpos que componen una orgía. Su solución conduciría a la siguiente pregunta ¿Cuál es la trayectoria, en el largo plazo, de los astros del sistema solar? En esta forma se podría contestar la pregunta ¿Es estable el sistema solar? El problema es tan apasionante que bien merecía dotarlo de un premio. Para conmemorar en 1890 los 60 años del rey Oscar II de Suecia y Noruega, un concurso es organizado, se premiará a quien responda analíticamente la pregunta ¿Es estable el sistema solar? Henry Poincaré, encuentra la solución y oh! sorpresa, otra vez por la negativa. No es posible resolver las ecuaciones diferenciales que expresan las trayectorias generales de tres cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional, con mayor razón no es posible encontrar analíticamente las trayectorias de los cuerpos celestes del sistema solar. Su trabajo da origen a las teorías del caos, estimula el desarrollo de la topología y entierra el determinismo Laplaciano.

Puede pensarse que el origen de los premios Nobel se halla en el éxito del concurso del rey Oscar II. Muchos se preguntan por qué no hay premio Nobel de matemáticas. Algunas mentes perversas dan la siguiente explicación: Alfred Nobel tenía una bella amiga italiana y la chismografía europea decía que también compartía mesa, techo y lecho con Gösta Mittag-Leffler, uno de los más originales matemáticos en el tránsito del siglo XIX al XX. Cualquiera que fuera el jurado para elegir o postular candidatos al Nobel de Matemáticas les hubiera sido imposible no postular u otorgar el Nobel a Mittag Leffler. Para mantener la reputación de los personajes, en buena hora, este chisme ha sido rechazado por matemáticos de la talla de Hörmander y Garding.

En matemáticas existe un reconocimiento de mayor significado, la "Medalla Fields" que se otorga cada cuatro años en el Congreso de Matemáticas bañado en buenos vinos y excelente comida.

Clase de Honor

En el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900, David Hilbert propuso 23 problemas que en su opinión ocuparían buena parte del quehacer matemático del siglo XX. El término "clase de honor" hace referencia a que quien resuelva un problema de estos, bien merece pertenecer a la "Clase de Honor".

A diferencia de los problemas griegos y renacentistas, los problemas de Hilbert por su nivel de abstracción ya no son tan populares. El espectacular desarrollo de la matemática después de Newton hace que cada vez menos personas puedan conocer todas las áreas de este divertimento. Talvez el último matemático que pudo exclamar "Lo sé todo" fue Euler y en parte porque desarrolló directamente la mayor parte del cálculo y el análisis.

Es interesante mencionar que en la actualidad el nivel de conocimiento de las áreas de la matemática de un buen bachiller abarca casi la totalidad de lo conocido hasta la época de Newton, incluido el núcleo de los trabajos de este pensador.

Entre los problemas hay unos de fácil enunciado y comprensión, por ejemplo, demostrar sin recurrir al cálculo integral, o al método de la exhaución, la igualdad del volumen de dos tetraedros de igual base y de igual altura, o demostrar utilizando solamente los axiomas de Euclides que la línea recta es la menor distancia entre dos puntos.

Otros problemas tratan áreas de lógica y fundamentación de las matemáticas y la física teórica. El más significativo es demostrar la consistencia de los axiomas de la Aritmética. Su solución por la negativa se le debe a Gödel. Su resultado conocido como "Principio de la indecibilidad" puede enunciarse así: en cualquier sistema axiomático del cual se deduzcan los números naturales con las operaciones de suma y multiplicación, o bien existen proposiciones imposibles de demostrar si son ciertas o falsas, o pueden deducirse proposiciones contradictorias. Edgar Morin propone enfrentar las incertidumbres derivadas de este resultado del fin del determinismo y de la mecánica cuántica con estas palabras: "La educación debe enseñar a navegar en el océano de incertidumbres a través de archipiélagos de certeza".

En 1963, Paul Cohen resuelve el denominado problema de Cantor –hipótesis de continuo–. No hay un número cardinal que sea menor que el cardinal de los números reales y mayor que los números naturales. Cohen demuestra que la afirmación que no existe conjunto cuyo cardinal tenga esa propiedad o la contraria que si existe un conjunto con un cardinal entre el aleph cero y aleph uno es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos. En 1966, Cohen recibe la Medalla Fields.

Preocupación continua de los físicos y los matemáticos es la denominada "Axiomatización de la Física", a pesar de los esfuerzos de Hamilton, Lagrange, y más recientemente Feymann y Landau, el problema sigue sin solución rigurosa. En los años 70, Alexander Grothendiech, luego de dar las bases sólidas a la geometría diferencial a la geometría algebraica, a la K- teoría y a la topología algebraica, anuncia que va a emprender el camino de formalizar la física, sin embargo, sus intereses en política radical y algunos retazos de fundamentalismo ecológico lo alejan de esta tarea. En esta área no puede dejar de mencionarse el trabajo de la matemática Emile Noether quien demuestra que existe una correspondencia entre las leyes de la conservación y las simetrías. A cada simetría le corresponde una ley de conservación, por ejemplo, la simetría de rotación implica la conservación del momento angular, la traslación la conservación del momento lineal.

Otros problemas de Hilbert se refieren a la posibilidad de diseñar algoritmos "eficientes" para resolver ecuaciones diofánticas, la solución nuevamente es por la negativa. Una serie de problemas se refiere a propiedades de Grupos de Lie, a topología algebraica, a la analiticidad de las soluciones de ecuaciones derivadas del cálculo de variaciones, y a la trascendencia de ciertos números.

Bien conocido es el problema denominado "Hipótesis de Riemann" que consiste en demostrar que todos los ceros de la función zeta de Riemann están sobre la recta X = 1/2. Recientemente se anunció que un matemático colombiano había demostrado la hipótesis, el trabajo serio, denso y original en realidad traslada la hipótesis de Riemann a la conjetura que un cierto sistema ortogonal es completo.

Años atrás el matemático francés Alain Connes (Medalla Fields) diseña un sistema de ecuaciones que especifica un sistema cuántico, el cual involucra todos los números primos y demuestra que el sistema tiene los niveles de energía que corresponden a los ceros de la función Zeta, si puede demostrarse que no hay otros ceros diferentes a los de los niveles de energía, la hipótesis de Riemann queda demostrada.

Es sorprendente cómo este problema involucra áreas de teorías de números, de funciones analíticas, de física teórica; más recientemente se ha conjeturado que la distribución de los ceros es caótica.

El estado actual de los problemas de Hilbert se resume así:

16 han sido solucionados
4 requieren precisar el alcance de su enunciado
3 no se han solucionado. La hipótesis de Riemann - Matematización de la Física, Topología algebraica de curvas y superficies.

Los Problemas del Milenio

En el año 2000 la Fundación Clay anuncia un concurso de siete problemas con un premio de US$1 millón para quien solucione uno de los problemas propuestos. Esta Fundación es creada por London Clay, quien aporta un fondo de US$90 Millones para su sostenimiento y pago de los premios.

Esta generosa contribución le ha permitido a la Fundación realizar seminarios, divulgar sus objetivos y vincular matemáticos de la talla de Alain Connes, Michael Atiyah, John Tuti, Ian Steward.

Por alguna razón ni Hilbert ni Clay proponen la denominada coyuntura de Golbach "Todo número puede expresarse como la suma de dos números primos", uno de los pocos problemas de enunciados comprensible pero de endiablada búsqueda de solución.

Como se mencionó atrás, a medida que avanzan las matemáticas y la física el nivel de abstracción se va haciendo mayor, y se hace más difícil explicar los problemas a los no especialistas, los de Clay no son la excepción.

En un intento de síntesis, que espero no fallido, voy a resumir su enunciado.

Hipótesis de Riemann - Es el único de los problemas de Hilbert que se acoge como problema del Milenio.

La Teoría de Yang-Mills y la Hipótesis del Vacío de la Masa "Mass Gap" - La infructuosa búsqueda de una teoría unificada de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, la electromagnética, la débil, la fuerte y la gravitatoria, ha obligado a desarrollar novedosas teorías físico matemáticas.

Uno de ellos es la "Teoría Cuántica de Campos", la complejidad de la matemática que emplea se expresa así. La Teoría Cuántica de Campos es física del siglo XX que emplea matemática del siglo XXI. El problema propuesto es el siguiente: demostrar en cualquier grupo compacto las ecuaciones de Yang-Mills en el espacio euclideo de cuatro dimensiones tienen una solución que predice la existencia del vacío de masa (mass gap). Es decir existe un número de energía diferente de cero en el vacío.

El Problema P vs NP - No todos los problemas para los que existe un algoritmo de solución pueden efectivamente calcularse con la ayuda de un computador por rápido que este sea. Si el tiempo de cálculo excede lo razonable (digamos un millón de años) el algoritmo no es computable. Esto explica la sensación de seguridad de las transacciones por Internet. El número de operaciones para factorizar el número una clave encriptada que sea el producto de dos primos "grandes", aún suponiendo que un computador eficiente ejecute miles de millones de operaciones por segundo, determina que el computador con un algoritmo simple demore millones de años en encontrar la respuesta. Sin embargo, día a día se encuentran algoritmos eficaces que permiten factorizar en tiempos millones de veces más cortos.

El problema del vendedor ambulante ilustra el tema: un vendedor debe ir a 100 ciudades, cual es la ruta más eficiente? Sin una estrategia, el número de posibles rutas asciende a 100 factorial y el tiempo de cálculo excede con creces la edad del universo. En este caso existen estrategias que simplifican el número de operaciones. En el ejemplo anterior el número de operaciones lo caracteriza como de complejidad exponencial, y el tiempo de solución crece exponencialmente con el número de parámetros, la pregunta es si existen estrategias de complejidad polinominal que permitan resolver en tiempos razonables problemas generales de complejidad exponencial.

El problema siguiente parece un inocente tema de física de fluidos, la ecuación de Navier Stokes:

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} + \left(\vec{\mu}.\nabla\right)\vec{\mu} = \vec{\mu} - \nabla^2 \varphi - gradp;$$
$$div\,\vec{\mu} = 0$$

Se pide encontrar la solución analítica.

La topología aporta el problema denominado "La Conjetura de Poincaré" en términos pintorescos consiste en encontrar una deformación continua que transforme una donna en una taza de café.

La Conjetura de Birch Swinnerton-Dyer, trata de las funciones elípticas en el campo de los números racionales y la pregunta se refiere a encontrar las condiciones para las cuales el número de puntos racionales en las curvas es infinito. Este problema está directamente relacionado con la hipótesis de Riemann y con el problema de Fermat.

La Conjetura de Hodge incursiona en el abstracto campo de la comohología de las variedades algebraicas.

Matemáticas sin Límite - En el año 2001, 83 matemáticos y físicos escribieron sobre el estado de las investigaciones, que en su opinión son las más interesantes de su campo. Los temas que sobresalen son, Matemática Experimental, Teoría Cuántica de Campos, Sistemas Dinámicos no holomónicos, Neurociencia computacional, Aspectos computacionales de la teoría de números, Modelajes de sistemas cardiovasculares.

Entre las autores pueden citarse Gerd Faltings y Maxim Kontsevich, galardonados con la Medalla Fields en 1998 y 1986 por sus trabajos en teoría cuántica de campos y geometría aritmetico-algebraica.

Muchos otros problemas interesantes están sin resolver. A quienes trabajamos en los Sistemas Dinámicos no Lineales, nos sorprende la dificultad que existe en demostrar que los ejemplos de atractores extraños son en realidad extraños y no simplemente trayectorias de periodo largo. Se puede demostrar que con probabilidad igual a 1 que son extraños, pero no hay una demostración analítica en un caso específico. Algo similar ocurría con los números trascendentes, un número real obtenido al azar es con probabilidad uno trascendente, demostrarlo en casos específicos es bien difícil.

Algunos otros problemas tienen una indiscutible utilidad, por ejemplo construir un modelo consistente de la temperatura atmosférica que involucre el efecto de invernadero, la oscilación del eje de la eclíctica y el feedback de la atmósfera considerada esta como un organismo vivo. La importancia es crucial, los diferentes modelos parciales dan resultados que pueden ser no significativos y sobre estos se han definido los protocolos de Kyoto.

En un intercambio de opiniones con el profesor Rodolfo Llinás, ante la encrucijada a la que llegó la matemática en el siglo XX con la ruptura del concepto de certeza y la desaparición del determinismo, planteó que hipotéticamente hubiera sido posible concebir una evolución diferente de la lógica y la matemática y que posiblemente si la humanidad, o mejor la civilización en sus albores hubiera desarrollado una "Lógica Difusa" con prevalencia sobre la lógica Aristotélica, talvez la matemática hubiera evolucionado por otros caminos en los cuales el principio de indecibilidad y de no computabilidad no se hubieran dado. Se tendrían otros caminos, otros callejones. El tema es apasionante.

En esta larga lista de problemas sólo los he tocado en la superficie, hay temas y trabajo para largo rato, los desafíos son apasionantes y ustedes señores becarios tienen la juventud, la inteligencia y las ganas para aspirar a pertenecer a la clase de honor.

Antes de recibir una injusta crítica por no haberme referido a los becarios de música, déjenme hacer la siguiente reflexión.

El concierto que ahora vamos a escuchar no sólo es de mayor duración que mis palabras, sino que con absoluta seguridad va a ser más disfrutado. Ustedes, becarios de música tienen una ventaja sobre quienes trabajan en física o en matemáticas, su quehacer estimula directamente sensaciones y conduce a diferentes estadios de satisfacción, sin que necesariamente quienes los escuchan tengan entrenamiento formal en música.

Si en la entrega de las becas, a continuación de mis palabras de felicitación, y perdónenme mis colegas, se anunciara que en lugar del concierto tuviera lugar la lectura de las tesis de quienes reciben las becas de física teórica o matemática pura, con alta seguridad no estaríamos en un teatro sino en una pequeña sala.

Le seguiremos apostando a la ciencia y a las artes, no nos preocupa su rentabilidad ni su utilidad, creemos que viviremos en un país mejor a medida que la juventud esté de igual a igual con los artistas y científicos del mundo más desarrollado, la globalización no es el mercado de objetos, es la libre circulación de ideas y ojalá la de tolerancia y de solución pacífica de conflictos nos permeen y encontraremos caminos más humanos que seguirnos matando y ahogando la posibilidad de modernizar la política alegando justificaciones insurreccionales o intolerancias estatales. La convivencia se obtendrá construyendo una mayor democracia y no reduciendo los atisbos de ella.