PRODUCTOS DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS SOBRE ÁLGEBRAS MULTIVALUADAS

Joaquín Luna Torres

Resumen. Dada una colección fínita de espacios LF-topológicos definidos sobre una álgebra multivaluada, se construye la topología producto y, bajo ciertas condiciones, se prueba que la construcción es estable para espacios LF-topológicos de Kolmogorov y de Hausdorff.

1. ÁLGEBRAS MULTIVALUADAS

Con el propósito de facilitar la lectura de este trabajo tomamos de [4] las ideas principales sobre las álgebras multivaluadas (MV-álgebras). estas estructuras fueron introducidas por Chang [3] en investigaciones sobre una prueba de completitud para el sistema de Lukasiewicz infinitamente valuado. Sin embargo, también juegan un papel importante en el estudio algebraico relacionado con todas las lógicas multivaluadas de Lukasiewicz así como en otras estructuras semejantes.

DEFINICIÓN 1.1. Una estructura algebraica $A = (L, \oplus, \neg, 0)$ de signatura $\langle 2, 1, 0 \rangle$ es una MV-álgebra si y sólo si $(L, \oplus, 0)$ es un monoide abeliano con elemento neutro 0 y si además para todo $x, y \in L$ son ciertas las afirmaciones siguientes.

(i) $\neg\neg(x) = x$
(ii) $x \oplus \neg 0 = \neg 0$
(iii) $\neg(\neg(x) \oplus y) \oplus y = \neg(\neg(y) \oplus x) \oplus x$

Una MV-álgebra es no trivial si sólo contiene por lo menos dos elementos.

Obviamente cada estructura $\langle W^*, vel_2, non_1, 0 \rangle$ es una MV-álgebra (c.f. [4]).

2000 Mathematics Subject Classification 54A40, 06D35.
Palabras y frases claves: Mv-álgebras, topología producto, espacios de Kolmogorov, espacios de Hausdorff.

Definición 1.2. Suponga que $\mathcal{A} = (L, \oplus, \neg, 0)$ es una MV álgebra. Entonces se define para cualquier $x,\ y \in L$:

$$\begin{aligned}
&x \otimes y := \neg(\neg(x) \oplus \neg(y)),\\
&x \to y := \neg(x) \oplus y,\\
&x \vee y := (x \otimes \neg(y)) \oplus y,\\
&x \wedge y := (x \oplus \neg(y)) \otimes y,\\
&1 := \neg(0).
\end{aligned}$$

Usando estas definiciones, una MV-álgebra $\mathcal{A}$ es no trivial si y sólo si $0 \neq 1$. La definición original de Chang [3] se basaba en las operaciones (primitivas) $\oplus, \otimes, \neg$ y las constantes 0, 1, dadas las definiciones de $\vee, \wedge$ como en la definición 1.2 y también constaba de la siguiente lista de condiciones:

$$\begin{array}{rl}
a \oplus b = b \oplus a & a \otimes b = b \otimes a,\\
a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c & a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c,\\
a \oplus \neg a = 1 & a \otimes \neg a = 0,\\
a \oplus 1 = 1 & a \otimes 0 = 0,\\
a \oplus 0 = a & a \otimes 1 = a,\\
\neg(a \oplus b) = \neg a \otimes \neg b & \neg(a \otimes b) = \neg a \oplus \neg b,\\
a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a,\\
a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c & a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c,\\
a \oplus (b \wedge c) = (a \oplus b) \wedge (a \oplus c) & a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c),\\
\neg\neg a = a & \neg 0 = 1
\end{array}$$

Cada MV-álgebra $\mathcal{A}$ está equipada, de manera natural, con una relación de orden $\leq$ definida para todo $a, b \in L$ por

$$a \leq b \Leftrightarrow (\exists c \in L)\,(a \oplus c = b)$$

el cual es un orden parcial. Todas las operaciones $\oplus, \otimes, \wedge, \vee$ son isotónicas (uniformes) con respecto a este orden y $\neg$ invierte el orden y por tanto es antitónica. De allí se sigue que la operación $\to$ es isotónica en su segundo argumento y antitónica en el primero. Para este orden, también se dispone de otras caracterizaciones naturales, por ejemplo,

$$a \leq b \Leftrightarrow a \otimes \neg b = 0 \quad \Leftrightarrow a \to b = 1$$

Y este orden es incluso un orden de retículo para las operaciones $\wedge, \vee$. Además, el retículo $(L, \wedge, \vee)$ con este orden, es distributivo.

En consecuencia, cada MV-álgebra $\mathcal{A} = (L, \oplus, \neg, 0)$ produce, de forma natural, un retículo $(L, \otimes, \perp, \top, \leq)$ completo con cotas universales inferior $\perp$ y superior $\top$, el cual también es un monoide abeliano.

Por otra parte, recordemos de [5] que

(1) Un *retículo completo cuasi-monoide* (cqm-retículo) es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ que satisface

(I) $(L, \leq,)$ es un retículo completo con cota superior universal $\top$ y cota inferior universal $\perp$.
(II) $(L, \leq, \otimes)$ es un grupoide parcialmente ordenado.
(III) $\alpha \leq \alpha \otimes \top,\ \alpha \leq \top \otimes \alpha \quad \forall \alpha \in L$

(2) Un *cuantal* es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ en la que $(L, \leq,)$ es un retículo completo y satisface las propiedades siguientes:

(V) $(L, \otimes)$ es un semigrupo.
(VI) $\otimes$ es distributivo sobre extremos superiores arbitrarios.

Cuando la operación $\otimes$ es conmutativa se dice que el cuantal $(L, \leq, \otimes)$ es un *GL-monoide*. De esta manera, podemos decir que una MV-álgebra completa es un GL-monoide en el cual vale la doble negación, es decir

$$(\alpha \to \perp) \to \perp = \alpha, \forall \alpha \in L$$

2. Productos de Espacios *LF-topológicos*

Nuestro trabajo se inicia con la construcción de espacios *LF*-topológicos definidos sobre MV-álgebras completas $(L, \leq, \otimes)$ con raices cuadradas. Esta característica se mantendrá de aquí en adelante. Recordemos de [5] el concepto de espacio *LF*-topológico.

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacio y $(L, \leq, \otimes)$ un cqm-retículo. Una LF-topología sobre X es una función $\mathcal{T} : L^{X} \to L$ que satisface las propiedades que siguen

$(\mathcal{O}1)\ \mathcal{T}(1_X) = \top$.

$(\mathcal{O}2)\, \mathcal{T}(f) \otimes \mathcal{T}(g) \leq \mathcal{T}(f \otimes g) \quad \forall f, g \in L^X$.

$(\mathcal{O}3)$ Para toda la familia $\{f_i | i \in I\}$ de elementos de L^X se cumple que

.

$$\underset{i \in I}{\wedge} \mathcal{T}(f_i) \leq \mathcal{T}(\underset{i \in I}{\vee} f_i).$$

La pareja $(X, \mathcal{T})$ se llama un espacio *LF*-topológico.

Consideremos ahora una colección fínita $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda = 1, 2, ..., n\}$ de espacios *LF*-topológicos construidos sobre una MV-álgebra completa $(L, \leq, \otimes)$ con raíz cuadrada y procedamos a construir con ellos una *LF*-topología sobre el producto

$$\prod_{\lambda=1}^{n} X_\lambda = \left\{ \phi : \{1, 2, ..., n\} \to \bigcup_{\lambda=1}^{n} X_\lambda \mid \phi_\lambda := \phi(\lambda) \in X_\lambda \right\}$$

a partir de las *LF*-topologías $\mathcal{T}_\lambda$ con $\lambda = 1, 2, ..., n$.

2.1 Consideraciones inciales. Cada proyección $p_\alpha : \Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda \to X_\alpha$, con $\phi \mapsto \phi_\alpha$ induce la función imagen recíproca

$$\overset{!}{p}_\alpha : L^{X_\alpha} \to L^{\Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda}$$

definida por $\overset{!}{p}_\alpha(g) = g \circ p_\alpha$ para cada $g \in L^{X_\alpha}$.

Nuestro problema consiste en construir una aplicación Ξ de manera que

(1) $\Xi \circ \overset{!}{p}_x = \mathcal{T}_\alpha$, i. e. para cada $\alpha = 1, 2, ..., n$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} L^{\Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda} \arrow[r, dashed, "\Xi"] & L \\ L^{X_\alpha} \arrow[u, "\overset{!}{p}_x"] \arrow[ur, "\mathcal{T}_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo

(2) Ξ sea una *LF*-topología,

(3) Si $\eta : L^{\Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda} \to L$ resuelve el problema anterior, entonces $\Xi \leq \eta$.

2.2. La LF-**topología producto**. Para obtener una LF-topología producto, como se requiere en el parágrafo anterior, empezamos por la construcción que sigue:

Para $f \in L^{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda}$ se define el conjunto:

$$\Pi_f = \left\{ \mu \in \prod_{\lambda=1}^{n} L^{X_\lambda} \mid \bigotimes_{\lambda=1}^{n} \overset{!}{p}_\lambda(\mu_\lambda) \leq f \right\}$$

Lema 2.1. La n-pla $1_\Delta = (1_{X_1}, 1_{X_2}, ..., 1_{X_n})$, donde 1_{X_i} es la cota universal superior de L^{X_i}, $i = 1, 2, ..., n,$ pertenece a $\Pi_{(1_{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda})}$.

Prueba. Es consecuencia de

$$\bigotimes_{\lambda=1}^{n} (1_\Delta) \circ p_\lambda \leq 1_{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda}.$$

Lema 2.2. *Si* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in (L^X)^n$ *entonces*

$$\bigotimes_{\lambda=1}^{n} (\mu_\lambda \circ p_\lambda) = (\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \mu_\lambda) \circ p_\lambda$$

Prueba. Como para cada $t \in X$ se tiene que $(\otimes_{\lambda=1}^{n} \mu_\lambda)(t) = \otimes_{\lambda=1}^{n} (\mu_\lambda(t))$ y para cada $r \in \Pi_{\lambda=1}^{n} L^{X_\lambda}$, $(\mu \circ p_\lambda)(r) = \mu(r_\lambda)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\left[(\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \mu_\lambda) \circ p_\lambda \right](r) &= (\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \mu_\lambda)(r_\lambda) \\
&= \bigotimes_{\lambda=1}^{n} (\mu_\lambda(r_\lambda)) \\
&= \bigotimes_{\lambda=1}^{n} (\mu_\lambda(p_\lambda(r))) \\
&= \bigotimes_{\lambda=1}^{n} (\mu_\lambda \circ p_\lambda)(r)
\end{aligned}$$

y la conclusión se sigue.

Lema 2.3. Consideremos los elementos $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \Pi_f$ y $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \Pi_g$ entonces $(\mu_1 \otimes \nu_1, ..., \mu_n \otimes \nu_n) \in \Pi_{f \otimes g}$

Prueba. De los datos se sigue que

$$\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \overset{!}{p}_{x}(\mu_\lambda) = \bigotimes_{\lambda=1}^{n} (\mu_\lambda \circ p_\lambda) \le f$$

y

$$\bigotimes_{\kappa=1}^{n} \overset{!}{p}_{\kappa}(\nu_\kappa) = \bigotimes_{\kappa=1}^{n} (\nu_\kappa \circ p_\kappa) \le g$$

entonces

$$[\bigotimes_{\lambda=1}^{n} (\mu_\lambda \circ p_\lambda)] \otimes [\bigotimes_{\kappa=1}^{n} (\nu_\kappa \circ p_\kappa)] \le f \otimes g$$

aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de $\otimes$,

$$\bigotimes_{\lambda=1}^{n} [(\mu_\lambda \circ p_\lambda) \otimes (\nu_\lambda \circ p_\lambda)] \le f \otimes g$$

y aplicando el lema 2.2., esta expresión se reduce a

$$\bigotimes_{\lambda=1}^{n} [(\mu_\lambda \otimes p_\lambda) \circ p_\lambda] \le f \otimes g$$

y la conclusión se sigue.

Ahora consideramos la función $\Xi : L^{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda} \to L$, definida para cada $f \in L^{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda}$ como sigue:

$$\Xi(f) = \vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \mathcal{T}_\lambda(\mu_\lambda) \mid (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \Pi_f\}.$$

Teorema 2.4. La función $\Xi : L^{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda} \to L$ es una *LF*-topología sobre $\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$.

Prueba.

(1) Por el lema 2.1,

$$\Xi(1_{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda}) = \vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \mathcal{T}_\lambda(\mu_\lambda) \mid \mu \in \Pi(1_{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda})\} = \top$$

(2) Para $f, g \in L^{\Pi_{\lambda=1}^{n} X_\lambda}$ tenemos que probar que $\Xi(f) \otimes \Xi(g) \le \Xi(f \otimes g)$. En efecto, como

$$\Xi(f) = \vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \mathcal{T}_\lambda(\mu_\lambda) \mid \mu \in \Pi_f\},\ \Xi(g) = \vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n} \mathcal{T}_\lambda(\nu_\lambda) \mid \nu \in \Pi_g\}$$

y $\otimes$ conmuta con extremos superiores, usando el Lema 2.3. obtenemos

$$\begin{aligned}
\cdot\ \Xi(f)\otimes\Xi(g) &= \vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n}\mathcal{T}_\lambda(\mu_\lambda)\otimes\bigotimes_{\alpha=1}^{n}\mathcal{T}_\alpha(\nu_\alpha)\mid \mu\in\Pi_f,\nu\in\Pi_g\}\\
&\leq \vee\{\mathcal{T}_\lambda(\bigotimes_{\lambda=1}^{n}\mu_\lambda)\otimes\mathcal{T}_\alpha(\bigotimes_{\alpha\in\Lambda}\nu_\alpha)\mid \mu\in\pi_f,\nu\in\pi_g\}\\
&\leq \vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n}\mathcal{T}_\lambda(r_\lambda)\mid r\in\Pi_{f\otimes g}\}\\
&= \Xi\ (f\otimes g)
\end{aligned}$$

(3) Sea $\{f_j \mid j\in J\}\subseteq L^{\Pi_{\lambda=1}^{n}X_\lambda}$, veamos que

$$\bigwedge_{j\in J}\Xi(f_j)\leq\Xi(\bigvee_{j\in J}f_j).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{j\in J}\Xi(f_j) &= \bigwedge_{j\in J}\vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n}\mathcal{T}_\lambda(\mu_{j_\lambda})\mid \mu_j\in\Pi_{f_j}\}\\
&\leq \vee[\bigwedge_{j\in J}\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n}\mathcal{T}_\lambda(\mu_{j_\lambda})\mid \mu_j\in\Pi_{f_j}\}]\\
&\leq \vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n}\mathcal{T}_\lambda(\bigwedge_{j\in J}(\mu_{j_\lambda}))\mid\ \mu_j\in\Pi_{f_j}\},
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\Xi\ (\bigvee_{j\in J}f_j)=\vee\{\bigotimes_{\lambda=1}^{n}\mathcal{T}_\lambda(\rho_\lambda)\mid \rho\in\Pi_{j\in J\, f_j}\},$$

de donde se sigue la afirmación del teorema.

3. Espacios LF-topológicos de Kolmogorov

En esta sección presentamos una noción de espacio LF-topológico de Kolmogorov, definido sobre una MV-álgebra completa $(L,\leq,\otimes)$ con raíz cuadrada, que generaliza el concepto de espacio L-topológico de Kolmogorov que aparece en [5] y se prueba que el espacio producto construido en la sección anterior goza de esa propiedad cuando cada uno de los factores la tiene.

Definición 3.1. *Un espacio LF-topológico* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio de Kolmogorov si para cada par* $(p,q) \in X \times X$, $p \neq q$, *existe* $g \in L^X$ *tal que*
(i) $\mathcal{T}(g) \in L^0 := L - \{\perp\}$
(ii) $g(p) \neq g(q)$

Teorema 3.1. *Si* $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ $\lambda = 1, 2, ..., n$ *son espacios LF-topológicos de Kolmogorov construidos sobre una MV-álgebra completa* $(L, \leq, \otimes)$ *con raíz cuadrada, entonces el espacio LF-topológico producto* $(\Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda, \Xi)$ *del teorema 2.4. también es un espacio LF-topológico de Kolmogorov.*

Prueba. Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ dos elementos distintos de $\Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda$. Veamos que existe $g \in L\Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda$ tal que
(i) $\Xi(g) \in L^0$
(ii) $g(\alpha) \neq g(\beta)$.
Como $\alpha_i \neq \beta_i$ para algún $i = 1, 2, ..., n$, existe $g_i \in L^{X_i}$ tal que
(i) $\mathcal{T}_i(g_i) \in L^0$
(ii) $g_i(\alpha_i) \neq g_i(\beta_i)$

Ahora,

$$\Xi : L^{L\Pi_{\lambda=1}^n X_\lambda} \to L$$

está definida por

$$\Xi(f) := \vee\{\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i(g_i) \mid (g_1, ..., g_n) \in \Pi_f\}$$

donde

$$\begin{aligned}\Xi_f &= \{(g_1, ..., g_n) \in L^{X_1} \times ... \times L^{X_n} \mid \otimes_{i=1}^n p_i^!(g_i) \leq f\} \\ &= \{(g_1, ..., g_n) \in L^{X_1} \times ... \times L^{X_n} \mid \otimes_{i=1}^n (g_i \circ p_i) \leq f\}\end{aligned}$$

y como

$$(g_i \circ p_i)(\alpha) = g_i(\alpha_i) \neq (g_i \circ p_i)(\beta) = g_i(\beta_i)$$

entonces para

$$\tilde{g} = g_i \circ p_i \in \prod_{\lambda=1}^{n} X_\lambda$$

tenemos que

$$g = (1_{X_1}, ..., 1_{X_{i-1}}, g_i, 1_{X_{i+1}}, ..., 1_{X_n}) \in \Pi_{\tilde{g}}$$

ya que

$$1_{X_1} \circ p_1 \otimes ... \otimes g_i \circ p_i \otimes ... 1_{X_n} \circ p_n \leq g_i \circ p_i$$

Luego

$$\Xi(\tilde{g}) = \vee \{\mathcal{T}_1(1_{X_1}) \otimes \mathcal{T}_2(1_{X_2}) \otimes ... \otimes \mathcal{T}_i(g_i) \otimes ... \otimes \mathcal{T}_n(1_{X_n})\}$$
$$\vee \{\top \otimes ... \otimes \top \otimes \mathcal{T}_i(g_i) \otimes \top \otimes ... \otimes \top\} \geq \mathcal{T}_i(g_i) \in L^0$$

por lo tanto

$$\Xi(\tilde{g}) \in L^0$$

4. Espacios LF-topológicos de Hausdorff

Finalmente generalizamos la noción de espacio L-topológico de Hausdorff que aparece en [5] al caso de los espacios LF-topológicos definidos sobre una MV-álgebra completa $(L, \leq, \otimes)$ con raíz cuadrada y probamos que el producto de espacios LF-topológicos de Hausdorff hereda esa propiedad.

Definición 4.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio LF-topológico y $g \in L^X$ es una función que cumple $\mathcal{T}(g) \in L^0$, se define la función $g^* \in L^X$ así:

$$g^* := \vee \{h \in L^X \mid \mathcal{T}(h) \in L^0, \text{ y, } h \otimes g \leq 1_\phi \otimes 1_X\}$$

Definición 4.2. Un espacio LF-topológico $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff si para cada par de puntos $p, q \in X$, $p \neq q$, existe $g \in L^X$ que satisface las propiedades siguientes

(i) $\mathcal{T}(g) \in L^0$

(ii) $\mathcal{T}(g^*) \in L^0$

(iii) $g^*(p) \otimes g(q) \not\leq \perp \otimes \top$

Teorema 4.1. Si $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, es una familia finita de espacios LF-topológicos de Hausdorff entonces el espacio producto $(\Pi_{i=1}^{n} X_i, \Xi)$ es un espacio Lf-topológico de Hausdorff.

Prueba. Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ dos puntos distintos en $\Pi_{i=1}^{n} X_i$.

Debemos encontrar un morfismo $g \in L^{\Pi_{i=1}^{n} X_i}$ que satisfaga

(i) $\Xi(g) \in L^0$

(ii) $\Xi(g^*) \in L^0$

(iii) $g^*(\alpha) \otimes g(\beta) \nleq \perp \otimes \top$.

En efecto, $\alpha \neq \beta$ si y solo si existe $k, 1 \leq k \leq n$, tal que $\alpha_k \neq \beta_K$. Como cada espacio factor es de Hausdorff, existe $g_k \in L^{X_k}$ que cumple

(i) $\mathcal{T}_k(g_k) \in L^0$

(ii) $\mathcal{T}_k(g_k^*) \in L^0$

(iii) $g_k^*(\alpha_k) \otimes g_k(\beta_k) \nleq \perp \otimes \top$

Consideremos en $L^{\Pi_{i=1}^{n} X_i}$ el morfismo

$$g = \bigotimes_{i=1}^{n} f_i \circ p_i, \text{ donde } f_i = \begin{Bmatrix} 1_{X_1} & si\ i \neq k \\ g_k & si\ i = k \end{Bmatrix}$$

Como

$$\Pi_g = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\} \in L^{X_1} \times L^{X_2} \times ... \times L^{X_n} \mid \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \circ p_i \leq g\}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Xi(g) &= \vee\{\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{T}_j(\mu_j) \mid \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\} \in \Pi_g\} \\ &\geq \mathcal{T}_1(1_{X_1}) \otimes ... \otimes \mathcal{T}_{k-1}(1_{X_{k-1}}) \otimes \mathcal{T}_k(g_k) \otimes \mathcal{T}_{k+1}(1_{X_{k+1}}) \otimes ... \otimes \mathcal{T}_n(1_{X_n}) \\ &= \mathcal{T}_k(g_k) > \perp \end{aligned}$$

De esta manera, $\Xi(g) \in L^0$.

Ahora

$$g^* = \vee\{h \in L^{\Pi_{i=1}^n X_i} \mid \Xi(h) \in L^0, h \otimes g \leq 1_\phi \otimes 1_{\Pi^{X_i}}\}$$
$$= \vee\{h \in L^{\Pi_{i=1}^n \dot{X}_i} \mid \Xi(h) \in L^0, h \otimes (\bigotimes_{i=1}^n f_i \circ p_i) = 1_\phi\}$$
$$= \vee\{h \in L^{\Pi_{i=1}^n X_i} \mid \Xi(h) \in L^0, h \otimes (g_k \circ p_k) = 1_\phi\};$$
$$\Pi_{g^*} = \{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in L^{X_1} \times L^{X_2} \times \dots \times L^{X_n} \mid \bigotimes_{i=1}^n \mu_i \circ p_i \leq g^*\}.$$

Luego

$$\Xi(g^*) = \vee\{\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i(\mu_i) \mid (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Pi_{g^*}\}$$
$$\geq \mathcal{T}_1(1_{X_1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}_k(g_k^*) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}_n(1_{X_n})$$
$$= \top \otimes \dots \top \otimes \mathcal{T}_k(g_k^*) \otimes \top \otimes \dots \otimes \top$$
$$= \mathcal{T}_k(g_k^*) > \perp,$$

y, en consecuencia $\Xi(g^*) \in L^0$.

Finalmente,

$$g^*(\alpha) \otimes g(\beta) \not\leq \perp \otimes \top = \perp$$

pues,

$$g(\beta) = \otimes_{i=1}^n (f_i \circ p_i)(\beta), \text{ donde } f_i = \begin{Bmatrix} 1_{X_1} & si\ i \neq k \\ g_k & si\ i = k \end{Bmatrix}$$

$$= 1_{X_1}(\beta_1) \otimes \dots \otimes g_k(\beta_k) \otimes \dots \otimes 1_{X_n}(\beta_n)$$
$$= \top \otimes \dots \top \otimes g_k(\beta_k) \otimes \top \otimes \dots \otimes \top$$
$$= g_k(\beta_k)$$

y

$$g^*(\alpha) = (\vee\{h \in L^{\Pi_{i=1}^n X_i} \mid \Xi(h) \in L^0, h \otimes (g_k \circ p_k) = 1_\phi\})(\alpha)$$
$$\geq (g_k^* \circ p_k)(\alpha) = g_k^*(\alpha_k),$$

de donde se sigue que

$$g^*(\alpha) \otimes g(\beta) \geq g_k^*(\alpha_k) \otimes g_k(\beta_k) \neq \perp.$$

Bibliografía

1. Jiri Adamek, Horst Herrlich, George Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
2. N. Bourbaki, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, 1966.
3. C. C. Chang, *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958). 467-490.
4. S. Gottwald, *Many-valued logic and fuzzi set theory* In: **Mathematics of Fuzzy sets: Logic, Topology and Measure Theory** (1999), Kluwer Academic Publisher, Boston.
5. U. Höhle, A. Sostak, *Fixed-Basis Fuzzy Topologies* In: **U. Höhle and S. E. Rodabaugh, Eds., Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology And Measure Theory** (1999), Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, Boston.
6. U. Höhle, *Commutative, residuated l-monoids* In: **U. Höhle and E. P. Klement, Eds., Nonclassical Logics and their Applications to Fuzzy Subsets** (1995), Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, Boston.
7. Liu Ying-Ming, Luo Mao-Kang, *Fuzzy Topology,* World Scientific, Singapore, 1997.
8. Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, New York, 1992.

Departamento de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá-Colombia
Email: jlunator@latino.net.co